Nachklausur zur Vorlesung "Lineare Algebra II"
SS 2017

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Max. Punktzahl	6	6	6	6	6	6	36
Erreichte Punktzahl							

Bemerkungen und Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **120** Minuten.
- Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein eigenes Blatt.
- "Schmierzettel" und Nebenrechnungen müssen nicht mit abgegeben werden.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen, insbesondere keine Bücher, Vorlesungs- oder Übungsmitschriften. Sie dürfen kein elektronisches Gerät an Ihrem Arbeitsplatz haben.
- Alle Lösungen sind zu begründen. Sie können sich auf alle Aussagen der Vorlesung berufen.
- Bitte merken Sie sich den angegebenen Code. Sie werden ihn benötigen, um Ihr Klausurergebnis in Erfahrung zu bringen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Betrachtet wird der Endomorphismus

$$f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2x_1, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, -x_4).$$

a) Sei (e_1, e_2, e_3, e_4) die Standardbasis von $\mathbb{Q}^4$. Zeigen Sie, daß die Untervektorräume $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $\langle e_4 \rangle$ f-invariant sind.

b) Zeigen Sie, daß es eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{Q}^4$ gibt, so daß $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist. Bestimmen Sie so eine Basis $\mathcal{A}$ und die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Betrachtet wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

a) Bestimmen Sie ein $T \in O(3)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, so daß $D = T^{-1}AT$.

b) Bestimmen Sie für jedes $m \in \mathbb{N}$ das Minimalpolynom von A^m.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Betrachtet wird auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die Bilinearform

$$b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1.$$

a) Zeigen Sie, daß b ein Skalarprodukt von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, b)$.

c) Zeigen Sie, daß die lineare Abbildung

$$f : (\mathbb{R}^2, b) \to (\mathbb{R}^2, b), \; (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, -x_2)$$

orthogonal ist.

d) Laut Vorlesung ist jeder orthogonale Endomorphismus eines 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraums entweder eine Drehung oder eine Spiegelung. Ist der orthogonale Endomorphismus f aus (c) eine Drehung von $(\mathbb{R}^2, b)$? Ist f eine Spiegelung von $(\mathbb{R}^2, b)$?

Aufgabe 4: (6 Punkte)

a) Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper K und $n \in \mathbb{N}$ die Dimension von V. Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus von V mit $\operatorname{rk}(f) = 1$. Geben Sie eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ in Jordanscher Normalform an, so daß es eine Basis $\mathcal{A}$ von V mit $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = A$ gibt.

b) Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper K und $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus von V mit $\operatorname{rk}(f) = 1$. Zeigen Sie, daß f diagonalisierbar oder nilpotent ist.

Aufgabe 5: (6 Punkte)
Sei (V, b) ein nicht-ausgearteter symmetrischer endlich erzeugter bilinearer Raum über dem Körper $\mathbb{R}$. Zeigen Sie

a) Es gibt ein $v \in V$ mit $b(v, v) = 0$ und $v \neq 0$ genau dann, wenn $\dim_+(V, b) \neq 0$ und $\dim_-(V, b) \neq 0$.

b) Sind $U_1, U_2, \ldots, U_n$ Untervektorräume von V mit $V = U_1 \perp U_2 \perp \ldots \perp U_n$ (bezüglich b), so ist $\dim_-(V, b) = \sum_{i=1}^{n} \dim_-(U_i, b|U_i)$.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

a) Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper K und $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus von V. Geben Sie die Definition des Stabilitätsindex s_f von f. Sei $\lambda \in K$. Geben Sie die in der Vorlesung angegebene Definition des verallgemeinerten Eigenraums zu f und λ.

b) Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper K, $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus von V und U ein f-invarianter Untervektorraum von V. Seien $f' = f|U : U \to U$ und $\bar{f} : V/U \to V/U$ die von f induzierten Endomorphismen. In welcher Beziehung stehen die Polynome cp_f, $\operatorname{cp}_{f'}$ und $\operatorname{cp}_{\bar{f}}$?

c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Jede Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist diagonalisierbar oder ähnlich zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Sind V ein Vektorraum über einem Körper K und $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus von V und $p \in K[X]$, so ist $p(f)(\ker f) = \{0\}$.

(c) Sind $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ ein Isomorphismus, der selbstadjungiert ist, so ist auch der Isomorphismus $f^{-1} : V \to V$ selbstadjungiert.